Münster.1931.№33

Phil. Diss

Mathematik

# Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen zweier komplexen Veränderlichen

## Die Abbildungen der Hartogsschen Körper

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der philosophischen Doktorwürde der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster in Westfalen

vorgelegt von

Werner Siewert
aus Hagen in Westfalen

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Dezember 1930.

Dekan: Herr Prof. Dr. R. Schmidt.

Referent: Herr Prof. Dr. H. Behnke.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Meiner Mutter!

# Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen zweier komplexen Veränderlichen.

## Die Abbildungen der Hartogsschen Körper.

Durch eine Reihe von Arbeiten aus dem Gebiete der Funktionentheorie mehrerer komplexen Veränderlichen ist das Interesse auf die Abbildungen der **kreissymmetrischen Körper** gelenkt worden. *Man versteht hierbei unter einem kreissymmetrischen Körper einen vierdimensionalen Bereich, der bei sämtlichen Transformationen einer Gruppe:*

$$T_{m,p}(\vartheta)\begin{cases} w' = (w - w_0)e^{im\vartheta} + w_0 \\ z' = (z - z_0)e^{ip\vartheta} + z_0 \end{cases} \qquad (\vartheta \text{ beliebig reell})$$

*in sich übergeht* ($m, p$ sind gewisse ganze, zueinander teilerfremde Zahlen). Im allgemeinen betrachtet man nur solche Bereiche, die den Fixpunkt $(w_0, z_0)$ dieser Transformationen — den *„Mittelpunkt"* — als *inneren* Punkt enthalten.

Da einer allgemeinen Abbildungstheorie bisher allzugroße Schwierigkeiten im Wege standen, war es natürlich, zunächst die Abbildungen dieser wichtigsten vierdimensionalen Bereiche zu untersuchen. Nachdem schon H. Behnke[1]) sämtliche mittelpunktstreuen Abbildungen der Kreiskörper gefunden hatte, bestimmte H. Cartan[2]) ganz allgemein die möglichen mittelpunktstreuen Abbildungen beliebiger kreissymmetrischer Körper. Ferner gelang es ihm, den wichtigen Satz aufzustellen, daß jeder Bereich, der unendlich viele Tansformationen mit festem inneren Fixpunkt in sich zuläßt, sich stets auf einen kreissymmetrischen Körper abbilden läßt.

Schwieriger zeigte sich die Untersuchung der *nichtmittelpunktstreuen* Abbildungen eines solchen Körpers. Bisher sind — durch eine Arbeit von

---

[1]) H. Behnke, Die Abbildungen der Kreiskörper (Abh. d. Math. Sem. Hamburg, Bd. VII (1930), p. 329—341).

[2]) H. Cartan, Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique (Journal de Math., 9. série, 10 (1931), p. 1—114).

P. THULLEN[3]) — nur bei einer Klasse der kreissymmetrischen Körper, den **Reinhardtschen Kreiskörpern**, sämtliche möglichen Abbildungen bekannt. Es stellte sich hier das überraschende Ergebnis heraus, daß diese Körper — von ganz speziellen Ausnahmen abgesehen — außer den trivialen mittelpunktstreuen Abbildungen keine weiteren mehr zulassen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Abbildungen einer anderen wichtigen Klasse der kreissymmetrischen Körper — der **Hartogsschen Körper** — untersucht. Diese nehmen insofern unter den kreissymmetrischen Körpern eine Ausnahmestellung ein, als bei den definierenden Transformationen (vgl. Definition 1) nicht nur ein Fixpunkt auftritt, sondern eine ganze Ebene, die *„Symmetrieebene"* punktweise festbleibt.

Auch bei den Hartogsschen Körpern werden wir auf die gleiche, schon bei den Reinhardtschen Körpern auftretende, merkwürdige Starrheit gegen analytische Abbildungen stoßen, die bei fast allen vierdimensionalen Bereichen zu gelten scheint. Wir werden nämlich — unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen — zeigen, daß ein Hartogsscher Körper nur solche Abbildungen auf sich zuläßt, die die Symmetrieebene in sich überführen, nämlich Abbildungen von der Form:

$$w' = f(w),$$
$$z' = z \cdot g(w).$$

Der Beweis beruht im wesentlichen auf der Untersuchung derjenigen Transformationsgruppen, welche die Symmetrieebene auf sich abbilden; es ergibt sich, daß die Transformationen dieser Gruppe die einzig möglichen sind.

## Inhalt.

I. Definitionen und Bezeichnungen ..... 6
II. Die Haupttransformationen eines Hartogsschen Körpers. Einführung der Gruppen $\Gamma$ and $\Gamma^{(w)}$ ..... 9
III. Die Körper mit diskontinuierlicher Gruppe $\Gamma^{(w)}$:
§ 1. Hauptsatz über Körper mit diskontinuierlicher Gruppe $\Gamma^{(w)}$ ..... 11
§ 2. Die Abbildungen unvollkommener Hartogsscher Körper ..... 16
IV. Die Körper, deren Gruppe $\Gamma^{(w)}$ eine kontinuierliche Untergruppe enthält ..... 18

## I. Definitionen und Bezeichnungen.

Definition 1. Ein vierdimensionaler Bereich heißt ein **Hartogsscher Körper**, wenn er bei sämtlichen Transformationen der Gruppe

[3]) P. THULLEN, Zu den Abbildungen durch analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen (Math. Ann. 104 (1931), p. 244—259).

$$T_z(\vartheta) \quad \begin{cases} w' = w \\ z' = (z - z_0)e^{i\vartheta} + z_0 \end{cases} \qquad (\vartheta \text{ reell})$$

oder

$$T_w(\vartheta) \quad \begin{cases} w' = (w - w_0)e^{i\vartheta} + w_0 \\ z' = z \end{cases} \qquad (\vartheta \text{ reell})$$

in sich übergeht.

Wir setzen die Körper stets als *schlicht* und *beschränkt* voraus.

Die Transformationen $T_z(\vartheta)$ bzw. $T_w(\vartheta)$ bezeichnen wir als die zum Körper gehörigen **Grundtransformationen.**

Definition 2. Die Ebene $z = z_0$ (bzw. $w = w_0$) heißt die **Symmetrieebene** des Hartogsschen Körpers.

Die Symmetrieebene bleibt bei sämtlichen Grundtransformationen des Körpers *punktweise* fest. *Wir setzen im folgenden als Symmetrieebene stets die Ebene* $z = 0$ *voraus,* so daß also die Grundtransformationen lauten:

$$T_z(\vartheta) \quad \begin{cases} w' = w, \\ z' = ze^{i\vartheta}. \end{cases}$$

Ferner betrachten wir nur diejenigen Körper, in denen mindestens ein Punkt der Symmetrieebene *innerer* Punkt ist, und zwar nehmen wir als solchen den Koordinatenanfang (0, 0) an.

Definition 3. Ein Bereich heißt ein **vollkommener Hartogsscher Körper,** wenn er mit einem Punkt $(w_0, z_0)$ stets auch alle Punkte $(w_0, kz_0)$ mit $|k| \leqq 1$ enthält.

Alle andern Hartogsschen Körper heißen **unvollkommen.**

Der Rand eines vollkommenen Hartogsschen Körpers ist in der Form:

$$|z| = \Re(w) \quad (\Re(w) \text{ eine reelle positive Funktion})$$

darstellbar.

Unter dem *Hauptschnitt* eines Hartogsschen Körpers verstehen wir den von der Symmetrieebene $z = 0$ aus dem Körper herausgeschnittenen zweidimensionalen Bereich.

Es zeigt sich als zweckmäßig, jedem Hartogsschen Körper neben dem Hauptschnitt noch eine **„Projektion"** zuzuordnen, und zwar bezeichnen wir als solche die Gesamtheit aller Punkte $(w, z)$ mit der Koordinate $z = 0$ und einer der im Körper vorkommenden $w$-Koordinate. Sie bilden einen gewissen (zweidimensionalen) Bereich der $w$-Ebene[4]).

*Mit* $\mathfrak{H}^{(w)}$ *(bzw.* $\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$*) sei die zu dem Hartogsschen Körper* $\mathfrak{H}$ *gehörige Projektion (bzw. sein Hauptschnitt) bezeichnet.*

[4]) Die Projektion entsteht also, indem man jedem Punkte $(w_0, z_0)$ des Körpers den Punkt $(w_0, 0)$ der $w$-Ebene als Projektionspunkt zuordnet.

Bei einem vollkommenen Hartogsschen Körper fallen Projektion und Hauptschnitt zusammen.

Definition 4. Einen Hartogsschen Körper nennen wir **normiert**, wenn seine Projektion der Einheitskreis ist.

Satz 1. Jeder Hartogssche Körper mit einfach-zusammenhängender Projektion läßt sich eineindeutig und analytisch auf einen normierten Hartogsschen Körper abbilden.

Beweis: Ist $\mathfrak{H}^{(w)}$ die Projektion des gegebenen Körpers $\mathfrak{H}$ und

$$w' = f(w)$$

eine Funktion, die $\mathfrak{H}^{(w)}$ eineindeutig und analytisch auf den Einheitskreis abbildet, so ist

$$\begin{aligned} w' &= f(w), \\ z' &= z \end{aligned}$$

eine gewünschte Transformation, die $\mathfrak{H}$ eineindeutig auf einen normierten Körper abbildet.

Definition 5. Ein Hartogsscher Körper heißt ein **Reinhardtscher Kreiskörper**, wenn er durch sämtliche Transformationen

$$\begin{aligned} w' &= we^{i\vartheta} \\ z' &= ze^{i\varphi} \end{aligned} \qquad (\vartheta,\ \varphi \text{ reell})$$

in sich übergeführt wird.

Diejenigen Hartogsschen Körper, die *keine* Reinhardtschen Kreiskörper sind und sich auch nicht durch eine eineindeutige und analytische Transformation

$$\begin{aligned} w' &= f(w), \\ z' &= z \cdot g(w) \end{aligned}$$

auf einen solchen abbilden lassen, bezeichnen wir als **echte** Hartogssche Körper.

Da die Abbildungen der Reinhardtschen Kreiskörper bekannt sind[5]), lassen wir bei unseren Untersuchungen nur echte Hartogssche Körper zu — es sei denn, daß ausdrücklich anders vermerkt wird.

Wenn wir im folgenden von einer Abbildung eines Hartogsschen Körpers $\mathfrak{H}$ auf sich reden, so verstehen wir darunter eine Transformation, die das Innere von $\mathfrak{H}$ *eineindeutig* und *analytisch* auf sich abbildet.

## Bezeichnungen.

**1.** Ist die Transformation

$$(A) \qquad \begin{aligned} w' &= f(w, z), \\ z' &= g(w, z) \end{aligned}$$

[5]) Vgl. [3]).

eine Abbildung eines Körpers $\mathfrak{H}$ auf sich, so bezeichnen wir mit

$$(A^{-1}) \qquad \begin{aligned} w' &= f^{-1}(w, z), \\ z' &= g^{-1}(w, z) \end{aligned}$$

die zu $A$ inverse Transformation.

**2.** Sind $A_1, A_2, \cdots, A_n$ $n$ Transformationen von $\mathfrak{H}$ auf sich, so verstehen wir unter

$$B = A_n \cdots A_2 \cdot A_1$$

diejenige Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich, die entsteht, indem man die Transformationen $A_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ in der Reihenfolge von rechts nach links hintereinander ausführt.

**3.** Ein zweidimensionales (analytisches) Flächenstück nennen wir eine **ausgezeichnete Fläche** des Hartogsschen Körpers $\mathfrak{H}$, wenn es sich durch eine Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich in die Symmetrieebene überführen läßt (natürlich soll es sich dabei nur um Punkte dieser Mannigfaltigkeiten handeln, soweit sie im *Innern* des Körpers liegen).

**4.** Unter **ausgezeichneten Punkten** eines Hartogsschen Körpers $\mathfrak{H}$ verstehen wir diejenigen inneren Punkte, die sich durch Abbildungen von $\mathfrak{H}$ auf sich in den Punkt $(0, 0)$ werfen lassen. (Diese Auszeichnung des Punktes $(0, 0)$ ist willkürlich; man hätte ebenso jeden anderen *inneren* Punkt der Symmetrieebene auszeichnen können.)

*Bei Abbildungen eines Hartogsschen Körpers auf sich gehen ausgezeichnete Flächen und Punkte stets wieder in solche über.*

## II. Die Haupttransformationen eines Hartogsschen Körpers. Einführung der Gruppen $\Gamma$ und $\Gamma^{(w)}$.

Definition 6. Eine Transformation eines Hartogsschen Körpers $\mathfrak{H}$ auf sich heißt eine **Haupttransformation**, wenn sie mindestens einen inneren Punkt der Symmetrieebene wieder in einen solchen überführt.

Über die Haupttransformationen eines Hartogsschen Körpers gilt folgender von H. Cartan bewiesene Satz[6]):

Satz 2. *Jede Haupttransformation eines Hartogsschen Körpers hat die Form:*

$$(T) \qquad \begin{aligned} w' &= f(w), \\ z' &= z \cdot g(w). \end{aligned}$$

Satz 2 sagt insbesondere aus, *daß bei einer Haupttransformation die Symmetrieebene als Ganzes in sich übergeht, und ferner, daß hierbei*

[6]) Vgl. [2]) Théorème XXX, Corollaire 2°.

*sowohl die Projektion $\mathfrak{H}^{(w)}$ wie der Hauptschnitt $\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$ auf sich abgebildet werden.*

Aus Satz 2 folgt unmittelbar:

Satz 3. *Die einzigen Abbildungen eines Hartogsschen Körpers auf sich, die die Symmetrieebene punktweise festlassen, sind die Grundtransformationen:*

$$T_z(\vartheta) \quad \begin{cases} w' = w, \\ z' = z e^{i\vartheta}. \end{cases}$$

Beweis. Nach Satz 2 haben die gesuchten Transformationen die Form:

$$(T) \qquad \begin{aligned} w' &= f(w), \\ z' &= z\, g(w). \end{aligned}$$

Soll die Ebene $z = 0$ punktweise festbleiben, muß $f(w) \equiv w$ sein, woraus sofort $g(w) \equiv e^{i\vartheta}$ folgt (jeder von einer Ebene $w = c$ ($c$ aus $\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$) ausgeschnittene Kreis wird mittelpunktstreu auf sich abgebildet), w. z. bew. w.

Eine weitere wichtige Folgerung aus Satz 2 ist:

Satz 4. *Zwei ausgezeichnete Flächen eines Hartogsschen Körpers $\mathfrak{H}$ schneiden sich im Innern von $\mathfrak{H}$ nicht.*

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit voraussetzen, daß die eine der beiden Flächen die Ebene $z = 0$ ist. Eine zweite, von $z = 0$ verschiedene, ausgezeichnete Fläche $\mathfrak{F}$ schneide entgegen der Behauptung die Ebene $z = 0$ in einem Punkte $(w_0, 0)$. $A$ sei eine Transformation des Körpers in sich, die $\mathfrak{F}$ auf $z = 0$ abbildet. Da $A$ den Punkt $(w_0, 0)$ wieder in einen Punkt auf $z = 0$ überführt, hat $A$ nach Satz 2 die Form:

$$\begin{aligned} w' &= f(w), \\ z' &= z \cdot g(w), \end{aligned}$$

so daß $z = 0$ in sich übergeht, also mit $\mathfrak{F}$ zusammenfällt, entgegen der Voraussetzung.

**Die Gruppe $\Gamma$ und $\Gamma^{(w)}$.** Sind $T_1$ und $T_2$ zwei Haupttransformationen des Körpers $\mathfrak{H}$, so ist auch $T = T_2 \cdot T_1$ eine solche. Ebenso ist mit $T$ auch $T^{-1}$ eine Haupttransformation. Die Gesamtheit aller Haupttransformationen von $\mathfrak{H}$ bilden demnach eine Gruppe $\Gamma$.

Durchlaufen die Transformationen:

$$T \quad \begin{cases} w' = f(w), \\ z' = z \cdot g(w) \end{cases}$$

die Gruppe $\Gamma$, *so müssen notwendig auch die zugehörigen Funktionen* $f(w)$ *eine Gruppe bilden, die wir mit* $\Gamma^{(w)}$ *bezeichnen.* $\Gamma^{(w)}$ ist Untergruppe der Gruppe aller Abbildungen der Projektion $\mathfrak{H}^{(w)}$ bzw. des Hauptschnittes $\bar{\mathfrak{H}}^{(w)}$ auf sich.

Die Gruppe $\Gamma^{(w)}$ wird bei unseren weiteren Untersuchungen eine grundlegende Rolle spielen.

## III. Die Körper mit diskontinuierlicher Gruppe $\Gamma^{(w)}$.

### § 1.

Wir lassen als diskontinuierliche Gruppen $\Gamma^{(w)}$ alle diejenigen zu, bei denen sich die einem inneren Punkte der Symmetrieebene äquivalenten Punkte im Innern des Hauptschnittes nicht häufen. Wir werden zeigen, daß ein echter Hartogsscher Körper mit einer solchen Gruppe $\Gamma^{(w)}$ — sofern er kein *„allgemeiner Dizylinder“* [7]) ist — als einzige Abbildungen auf sich nur Haupttransformationen gestattet. Bei einem „allgemeinen Dizylinder“ sind noch weitere Transformationen möglich; die Abbildungen dieser Körper werden wir besonders bestimmen.

Satz 5. (Hauptsatz über Körper mit diskontinuierlicher Gruppe $\Gamma^{(w)}$). *Ist die zur Gruppe* $\Gamma$ *der Haupttransformationen eines echten Hartogsschen Körpers* $\mathfrak{H}$ *gehörige Gruppe* $\Gamma^{(w)}$ *diskontinuierlich und ist* $\mathfrak{H}$ *kein allgemeiner Dizylinder, so ist jede Abbildung von* $\mathfrak{H}$ *auf sich eine Haupttransformation, hat also die Form:*

$$w' = f(w),$$
$$z' = z \cdot g(w).$$

Zunächst werde kurz der etwas komplizierte Beweisgang skizziert:

Die Behauptung des Satzes sagt aus, daß unter den obigen Voraussetzungen *sämtliche ausgezeichneten Punkte auf der Symmetrieebene liegen.*

Wir untersuchen zunächst den Fall, *daß* $\Gamma^{(w)}$ *nur aus der Identität besteht.* Nimmt man dann an, daß, entgegen der Behauptung, in $\mathfrak{H}$ außerhalb der Symmetrieebene noch ein ausgezeichneter Punkt liegt, so folgt (auf Grund von Satz 4), daß die ausgezeichneten Punkte mindestens ein zweidimensionales, durch (0, 0) gehendes Flächenstück $\mathfrak{F}$ ausfüllen; $\mathfrak{F}$ ist zusammenhängend. Es sind nun zwei Fälle möglich; entweder liegen alle Punkte von $\mathfrak{F}$ auf der Ebene $w = 0$, oder aber es gibt

[7]) Ein solcher Bereich ist bekanntlich die Gesamtheit aller Punkte $(w, z)$, die man erhält, wenn man die $w$-Koordinate und die $z$-Koordinate unabhängig voneinander je einen Bereich $\Delta^{(w)}$ bzw. $\Delta^{(z)}$ der $w$- bzw. $z$-Ebene beliebig durchlaufen läßt. Der so erhaltene Zylinderbereich $\Delta$ ist ein Hartogsscher Körper, wenn $\Delta^{(z)}$ eine Kreisscheibe ist.

mindestens eine Ebene $w = c \neq 0$, auf welcher gleichfalls ausgezeichnete Punkte liegen. Im letzten Falle kommen wir zu einem Widerspruch. Nehmen wir dagegen den ersten Fall an, daß also sämtliche ausgezeichneten Punkte auf $w = 0$ liegen, so lassen sich leicht die möglichen Transformationen von $\mathfrak{H}$ auf sich bestimmen. Die einzigen Körper, die durch die gefundenen Transformationen auf sich abgebildet werden, sind die allgemeinen Dizylinder.

Im Falle, daß $\Gamma^{(w)}$ mehr als eine Transformation enthält, läuft der Beweisgang entsprechend.

Beweis von Satz 5. Wir setzen zuerst zur Vereinfachung des Beweises voraus, daß *die Gruppe $\Gamma^{(w)}$ nur aus der Identität besteht.*

**(I)** Angenommen, es gäbe in $\mathfrak{H}$, entgegen der Behauptung, außerhalb der Symmetrieebene $z = 0$ noch einen ausgezeichneten Punkt $(w_0, z_0)$, so wären mit $(w_0, z_0)$ auch alle Punkte des Kreises

$$(K) \qquad w = w_0, \qquad z = z_0 e^{i\vartheta} \qquad (0 \leqq \vartheta < 2\pi)$$

ausgezeichnet. Einen dieser Punkte transformiere man durch eine Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich — die nach Annahme sicher existiert — in $(0, 0)$; der Kreis $K$ geht hierbei in eine durch $(0, 0)$ laufende (analytische) Kurve $\tilde{K}$ über. Übt man dann auf $\mathfrak{H}$ nochmals die Grundtransformationen $T_z(\vartheta)$ aus, so überstreichen die Bilder von $\tilde{K}$ ein zweidimensionales Flächenstück, das aus lauter ausgezeichneten Punkten besteht. Es bilden also die ausgezeichneten Punkte *mindestens* eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Wir werden zeigen, daß sie *genau* ein zweidimensionales Flächenstück ausfüllen. Es geht nämlich durch jeden ausgezeichneten Punkt eine und nur eine ausgezeichnete Fläche (Satz 4). Da auf $z = 0$ und somit auch auf jeder anderen ausgezeichneten Fläche nur ein ausgezeichneter Punkt liegt, sind alle diese ausgezeichneten Flächen voneinander verschieden. Da ferner die ausgezeichneten Flächen sich nicht schneiden (vgl. Satz 4), und wir eine mindestens zweidimensionale Mannigfaltigkeit ausgezeichneter Punkte und somit eine mindestens zweiparametrige Schar ausgezeichneter Flächen erhalten, dürfen die ausgezeichneten Punkte auch höchstens nur zweidimensionale Punktmannigfaltigkeiten ausfüllen.

Die Gesamtheit aller ausgezeichneten Punkte sei mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Da $\mathfrak{F}$ bei jeder Transformation von $\mathfrak{H}$ auf sich, also sicherlich bei den Grundtransformationen $T_z(\vartheta)$ in sich übergeht, besteht $\mathfrak{F}$ aus kontinuierlichen Scharen analytischer Kreise, die je auf Ebenen $w = \text{const.}$ liegen. $\mathfrak{F}$ kann sich in keinem dieser Kreise verzweigen, weil $\mathfrak{F}$ sich sonst — da alle Punkte auf $\mathfrak{F}$ ineinander transformierbar sind — in jedem Kreise

verzweigen müßte und man somit mehr als ein zweidimensionales Kontinuum ausgezeichneter Punkte erhielte.

**(II)** $\mathfrak{F}$ *ist ein zusammenhängendes Flächenstück!*

Es enthält nämlich $\mathfrak{F}$ sicher um $(0, 0)$ ein einfach-zusammenhängendes Stück $\mathfrak{F}_0$. Zerfiele $\mathfrak{F}$ in mehrere, nicht miteinander zusammenhängende Stücke, so wäre jedes weitere, von $\mathfrak{F}_0$ verschiedene Stück von höherem Zusammenhang als $\mathfrak{F}_0$[8]). $\mathfrak{F}_1$ sei ein solches Stück. Transformiert man durch eine Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich einen Punkt von $\mathfrak{F}_1$ in $(0, 0)$, so ginge $\mathfrak{F}_1$ in $\mathfrak{F}_0$ über, was unmöglich ist.

**(III)** *Wir nehmen an, daß nicht alle Punkte von* $\mathfrak{F}$ *auf der Ebene* $w = 0$ *liegen.*

In diesem Falle bilden die auf $\mathfrak{F}$ vorkommenden $w$-Koordinaten ein eindimensionales Kurvenstück $\mathfrak{C}^{(w)}$, die „Projektion" von $\mathfrak{F}$[9]). Der Kreis:

$$(K) \qquad w = w_0, \qquad z = z_0 e^{i\vartheta} \qquad (0 \leqq \vartheta < 2\pi)$$

liege auf $\mathfrak{F}$; seine „Projektion" ist der Punkt $w_0$ auf $\mathfrak{C}^{(w)}$. Bei einer Transformation von $\mathfrak{H}$ auf sich geht $K$ wieder in eine *geschlossene analytische* Kurve $\tilde{K}$ auf $\mathfrak{F}$ über. Die Projektion von $\tilde{K}$ ist ebenfalls eine geschlossene analytische Kurve $\tilde{K}^{(w)}$, die eventuell auf einen Punkt zusammenschrumpfen kann, aber stets nur aus Punkten von $\mathfrak{C}^{(w)}$ besteht.

Da man nun immer eine *kontinuierliche Schar* von Transformationen von $\mathfrak{H}$ in sich angeben kann, die stetig gegen die Identität streben, liegen sämtliche Punkte von $\tilde{K}^{(w)}$ — der Projektion der Bildpunkte von $K$ — schließlich in beliebiger Nähe von $w_0$. Da ferner $\tilde{K}^{(w)}$ stets eine geschlossene Kurve ist und andererseits nur aus Punkten der *festen* Kurve $\mathfrak{C}^{(w)}$ besteht, ist dies nur möglich, falls $\tilde{K}^{(w)}$ bei jeder Transformation mit *einem* Punkte von $\mathfrak{C}^{(w)}$ zusammenfällt; das aber heißt, $\tilde{K}$ liegt ganz auf einer Ebene $w = \text{const}$. Daraus folgt unmittelbar, daß bei einer Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich jede Ebene $w = c$, die $\mathfrak{F}$ schneidet, wieder in eine Ebene $w = c'$ übergehen muß.

Auf der Ebene $w = 0$ ist nun (innerhalb eines genügend kleinen Kreises) entweder $(0, 0)$ der einzige ausgezeichnete Punkt, oder es existiert eine volle Kreisscheibe:

$$(K_0) \qquad w = 0, \qquad |z| < r_0$$

mit ausgezeichneten Punkten. Bei einer Transformation von $\mathfrak{H}$ in sich, die $(0, 0)$ in einen nicht auf $w = 0$ liegenden ausgezeichneten Punkt

---

[8]) Es besteht nämlich jedes Stück aus einer kontinuierlichen Schar von Kreisen, deren Mittelpunkte sämtlich auf $z = 0$ liegen; da auf $z = 0$ außer $(0, 0)$ kein ausgezeichneter Punkt liegt, hat jedes $\mathfrak{F}_0$ nicht umfassende Stück ein „Loch".

[9]) Vgl. auch Seite 7.

wirft, müßte $w = 0$ auf $w = c \neq 0$ und somit $(0, 0)$ bzw. $K_0$ auf den durch $w = c$ aus $\mathfrak{F}$ herausgeschnittenen Kreis oder Kreisring[10]) abgebildet werden, was beides unmöglich ist. *Es bleibt also nur der Fall übrig, daß sämtliche Punkte von $\mathfrak{F}$ auf $w = 0$ liegen.*

**(IV)** Da für die Bildpunkte eines beliebigen inneren Punktes $(c, 0)$ der Symmetrieebene dieselben Überlegungen wie für die ausgezeichneten Punkte — die Bildpunkte von $(0, 0)$ — durchführbar sind, gilt somit für *jedes* $(c, 0)$ aus $\bar{\mathfrak{H}}^{(w)}$, *daß seine Bildpunkte stets nur auf der Ebene $w = c$ liegen.* Es muß demnach bei einer Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich jede Ebene $w = c$ ($(c, 0)$ aus $\bar{\mathfrak{H}}^{(w)}$) in sich übergehen, d. h. jede Abbildung von $\mathfrak{H}$ hat die Form:

$$w' = w,$$
$$z' = g(w, z).$$

Da jede der Ebenen $w = c$ aus $\mathfrak{H}$ einen Kreis ausschneidet, läßt sich $g(w, z)$ zerlegen in:

$$g(w, z) \equiv \frac{z \cdot e^{i\vartheta_{(w)}} - g(w) \cdot R(w) \cdot e^{i\vartheta_{(w)}}}{\frac{\overline{g(w)}}{R(w)} \cdot z - 1},$$

wobei $R(c)$ der Radius des von $w = c$ ausgeschnittenen Kreises und $g(c) \cdot R(c)$ die $z$-Koordinate des durch die Transformation in den Mittelpunkt $(c, 0)$ geworfenen Punktes bedeutet. Die Koeffizienten von $z$ sind dabei *analytische* Funktionen von $w$. Es ist also $e^{i\vartheta_{(w)}}$ und somit auch $g(w) \cdot R(w)$ analytisch in $w$. Da zugleich $\frac{\overline{g(w)}}{R(w)}$ eine analytische Funktion von $w$ ist, gilt dasselbe für

$$g(w) \cdot R(w) \cdot \frac{\overline{g(w)}}{R(w)} = |g(w)|^2,$$

d. h. es muß $g(w) = \text{const.}$ sein. Daraus wiederum folgt der analytische Charakter von $R(w)$. Da $R(w)$ nur reelle Werte annimmt, muß gleichfalls $R(w) = \text{const.}$ sein. Die Transformationen von $\mathfrak{H}$ haben also die Form:

$$w' = w,$$
$$z' = \frac{z - z_0 \cdot R}{\frac{1}{R}\bar{z}_0 \cdot z - 1} e^{i\vartheta}.$$

[10]) Jede von $w = 0$ verschiedene Ebene $w = c$ schneidet aus $\mathfrak{F}$ höchstens Kreise oder Kreisringe, nie aber eine volle Kreisscheibe aus, da sonst entgegen der Annahme auch der Punkt $(c, 0)$ ausgezeichnet wäre.

Das ist aber nur möglich, falls jede Ebene $w = c$ einen Kreis mit dem festen Radius $R$ ausschneidet, d. h. $\mathfrak{H}$ ein allgemeiner Dizylinder ist. Hiermit ist der Satz für den Fall bewiesen, daß $\Gamma^{(w)}$ nur aus der Identität besteht.

Enthält nun $\Gamma^{(w)}$ mehr als eine Transformation, so läßt sich der Beweis ohne Schwierigkeit genau so durchführen, nur daß jetzt die Menge $\mathfrak{F}$ der ausgezeichneten Punkte aus einer endlichen (bzw. unendlichen, aber diskontinuierlichen)[11]) Schar zweidimensionaler Flächenstücke besteht. Da es aber auch in diesem Falle eine stetige *kontinuierliche* Schar von Transformationen von $\mathfrak{H}$ in sich gibt, die gegen die Identität streben, ist dies wiederum nur möglich, wenn bei jeder Transformation die Ebenen $w = \text{const.}$ wieder in solche übergehen, also jede Transformation von $\mathfrak{H}$ die Form hat:

$$w' = f(w),$$
$$z' = g(w, z).$$

Durch die gleichen Überlegungen wie in (IV) folgt dann die Behauptung auch für den allgemeinen Fall.

**Die Abbildungen der allgemeinen Dizylinder.** Wir wollen jetzt die möglichen Abbildungen derjenigen allgemeinen Dizylinder, die zugleich Hartogssche Körper sind, untersuchen, die eben als Ausnahmekörper auftraten.

Mit $\Delta^{(w)}$ und $\Delta^{(z)}$ seien die dem gegebenen allgemeinen Dizylinder $\Delta$ in der $w$- bzw. $z$-Ebene zugeordneten zweidimensionalen Bereiche bezeichnet. Wir können dabei ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit voraussetzen, daß $\Delta^{(z)}$ der Einheitskreis ist[12]).

Satz 6. *Ist* $w' = f(w)$[13]) *die allgemeinste Abbildung von* $\Delta^{(w)}$ *in sich, so bilden sämtliche Transformationen:*

$$w' = f(w),$$
$$z' = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1} e^{i\vartheta} \qquad (|z_0| < 1,\ \vartheta \text{ reell})$$

*und nur diese* $\Delta$ *auf sich ab.*

Beweis. Daß $\Delta$ bei den angegebenen Transformationen in sich übergeht, ist trivial. Es muß lediglich gezeigt werden, daß diese Transformationen die einzig möglichen sind.

---

[11]) D. h. die einzelnen Flächenstücke häufen sich nicht im Innern von $\mathfrak{H}$.

[12]) Vgl. [7]).

[13]) Es ist hierbei nicht vorausgesetzt, daß die durch die Funktionen $f(w)$ gebildete Gruppe $\Gamma^{(w)}$ diskontinuierlich ist.

Jede der Ebenen $z = c$ mit $|c| < 1$ ist eine ausgezeichnete Fläche. Da durch jeden Punkt höchstens eine ausgezeichnete Fläche geht (Satz 4), können keine weiteren ausgezeichneten Flächen in $\Delta$ auftreten. Ist daher

$$(A) \qquad \begin{aligned} w' &= f(w, z), \\ z' &= g(w, z) \end{aligned}$$

eine Abbildung von $\Delta$ auf sich, so muß dabei jede Ebene $z = c$ ($|c| < 1$) wieder in eine Ebene $z' = c'$ ($|c'| < 1$) übergehen, d. h. es gilt insbesondere

$$(1) \qquad g(w, z) \equiv \tilde{g}(z) \equiv \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1} e^{i\vartheta_0}.$$

Versteht man ferner unter $B$ die Transformation:

$$(B) \qquad \begin{aligned} \tilde{w} &= w', \\ \tilde{z} &= \tilde{g}^{-1}(z'), \end{aligned}$$

so ist

$$(B \cdot A) \qquad \begin{aligned} \tilde{w} &= f(w, z), \\ \tilde{z} &= z \end{aligned}$$

eine Haupttransformation von $\Delta$, d. h. es ist

$$(2) \qquad f(w, z) = \tilde{f}(w),$$

woraus in Verbindung mit (1) unmittelbar die Behauptung folgt.

## § 2.

Satz 7. *Ist $\mathfrak{H}$ ein unvollkommener Hartogsscher Körper mit einfachzusammenhängender Projektion $\mathfrak{H}^{(w)}$, so ist jede Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich eine Haupttransformation, also von der Form:*

$$\begin{aligned} w' &= f(w), \\ z' &= z \cdot g(w). \end{aligned}$$

Zum Beweise genügt es nach Satz 5, zu zeigen, daß die zu $\mathfrak{H}$ gehörige Gruppe $\Gamma^{(w)}$ *endlich* ist.

I. Setzen wir $\mathfrak{H}$ als *normiert*, also $\mathfrak{H}^{(w)}$ als Einheitskreis voraus, so hat jede der zu $\Gamma^{(w)}$ gehörigen Funktionen die Form:

$$(1) \qquad f(w) \equiv \frac{w - w_0}{\bar{w}_0 w - 1} e^{i\vartheta_0}.$$

Durch (1) muß aber auch der von $\mathfrak{H}^{(w)}$ verschiedene Hauptschnitt $\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$ auf sich abgebildet werden. Dies ist aber nur dann möglich, wenn $\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$ ebenfalls eine Kreisscheibe ist oder aus Kreisringen besteht — es sei denn, daß $\Gamma^{(w)}$ als einzige Transformation die Identität enthält.

II. Berühren sich nun die Randkreise von $\mathfrak{H}^{(w)}$ und $\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$, so hat (1) einen Fixpunkt auf dem Rande des Einheitskreises, d. h. es muß $f(w) \equiv w$ sein. Es besteht also $\Gamma^{(w)}$ nur aus der Identität und es ist somit für diesen Fall der Satz schon bewiesen.

III. Berühren sich dagegen die Ränder von $\mathfrak{H}^{(w)}$ und $\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$ nicht, so gibt es eine gebrochene lineare Transformation:

$$w' = \frac{w - w_0}{\overline{w}_0 w - 1} e^{i\vartheta_0},$$
$$z' = z,$$

die $\mathfrak{H}$ auf einen Hartogsschen Körper $^*\mathfrak{H}$ abbildet, derart, daß $\mathfrak{H}^{(w)}$ und $\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$ in zwei konzentrische Kreisscheiben $^*\mathfrak{H}^{(w)}$ und $^*\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$ übergehen (im Falle, daß $\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$ aus Kreisringen besteht, betrachte man den äußersten Kreisrand). Die einzigen Transformationen, die dann noch $^*\mathfrak{H}^{(w)}$ und $^*\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$ zugleich in sich überführen, sind die Drehungen:

$$(^*\Gamma^{(w)}) \qquad w' = w e^{i\varphi},$$

d. h. insbesondere sämtliche Transformationen der Gruppe $^*\Gamma$ haben (0, 0) als Fixpunkt. Nach einem Satz von H. CARTAN[14]) ist dann entweder $^*\mathfrak{H}$ ein Reinhardtscher Kreiskörper, oder aber es besteht $^*\Gamma^{(w)}$ nur aus endlich vielen Transformationen:

$$(^*\Gamma^{(w)}) \qquad w' = w e^{2\pi i \frac{n}{\varkappa}} \qquad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \cdots, \varkappa \text{ und } \varkappa \text{ eine} \\ \text{gewisse feste ganze Zahl} \end{pmatrix},$$

woraus unmittelbar nach Satz 5 die Behauptung folgt. (Enthält $^*\mathfrak{H}$ (0, 0) nicht als inneren Punkt, so betrachte man den kleinsten $^*\mathfrak{H}$ umfassenden vollkommenen Hartogsschen Körper $^*\tilde{\mathfrak{H}}$, der durch jede Haupttransformation von $^*\mathfrak{H}$ gleichfalls auf sich abgebildet wird[15]).)

Wir können Satz 7 noch, wie folgt, verschärfen:

Satz 7a. *Ist $\mathfrak{H}$ ein unvollkommener echter Hartogsscher Körper mit einfach-zusammenhängender Projektion, so sind nur zwei Fälle möglich:*

1. *$\mathfrak{H}$ läßt als einzige Transformation in sich die Grundtransformationen zu:*

$$(T_z(\vartheta)) \qquad w' = w,$$
$$z' = z e^{i\vartheta}.$$

[14]) Vgl. [2]) Théorème XXX.

[15]) Vgl. auch [2]) Kap. V.

2. *$\mathfrak{H}$ ist so auf einen anderen Hartogsschen Körper $^*\mathfrak{H}$ abbildbar, daß dieser nur Transformationen der Form:*

$$w' = we^{2\pi i\frac{n}{\varkappa}} \qquad \left(\begin{matrix} n = 1, 2, \cdots, \varkappa \\ \varkappa \text{ feste ganze Zahl}\end{matrix}\right),$$
$$z' = z \cdot g(w)$$

*gestattet.*

Der erste Fall tritt stets dann ein, wenn $\Gamma^{(w)}$ nur aus der Identität besteht (vgl. Beweis von Satz 3), also etwa dann, wenn die Randkurven von $\mathfrak{H}^{(w)}$ und $\overline{\mathfrak{H}}^{(w)}$ Punkte gemeinsam haben.

*Der Koordinatenanfang* (0, 0) *ist Fixpunkt aller dieser Transformationen.*

## IV. Die Körper, deren Gruppe $\Gamma^{(w)}$ eine kontinuierliche Untergruppe enthält.

Wir betrachten im folgenden nur Hartogssche Körper mit *einfachzusammenhängender* Projektion. Ist die zum Körper $\mathfrak{H}$ gehörige Gruppe $\Gamma^{(w)}$ *kontinuierlich,* oder enthält $\Gamma^{(w)}$ eine derartige Untergruppe, so muß $\mathfrak{H}$ (nach III, § 2) ein vollkommener Hartogsscher Körper sein. Wir dürfen also $\mathfrak{H}$ als normiert voraussetzen (Satz 1). Unter gewissen einschränkenden Bedingungen läßt sich dann zeigen, daß $\mathfrak{H}$ ein Reinhardtscher Kreiskörper ist.

Satz 8. *Ist $\mathfrak{H}$ ein vollkommener Hartogsscher Körper mit einfachzusammenhängender Projektion und zweimal stetig (nach $u$ und $v$, $w = u + iv$) differentiierbarer Randgleichung:*

$$|z| = \Re(w), \tag{1}$$

*enthält ferner die zu $\mathfrak{H}$ gehörige Gruppe $\Gamma^{(w)}$ mindestens eine kontinuierliche Untergruppe mit differentiierbarem Parameter, so läßt sich $\mathfrak{H}$ durch eine Transformation*

$$w' = f(w),$$
$$z' = z \cdot g(w)$$

*auf einen Reinhardtschen Kreiskörper abbilden.*

### Beweis[16]).

I. Wir setzen von vornherein $\mathfrak{H}$ als normiert voraus. Sämtliche, zu $\Gamma^{(w)}$ bzw. einer geeigneten Untergruppe gehörigen Funktionen haben dann die Form:

---

[16]) Vgl. hierzu [3]) Seite 251—254.

$$f(w;t) \equiv \frac{w - w_0(t)}{\overline{w_0(t)} \cdot w - 1} e^{i\vartheta_0(t)}, \tag{2}$$

wobei $f(w;t)$ nach $t$ differentiierbar ist. Die allgemeinste Transformation von $\Gamma$ sei:

$$\begin{aligned} w &= f(w';t), \\ z &= z' \cdot g(w'); \end{aligned} \tag{3}$$

durch (3) geht (1) über in:

$$|z'| = \frac{\Re(f(w';t))}{|g(w')|}.$$

Es gilt somit die Identität:

$$\Re(w) \equiv \frac{\Re(f(w;t))}{|g(w)|}.$$

Da $|g(w)|$ eine harmonische Funktion von $u$ und $v$ ist, so gilt:

$$\Delta\{\log \Re(w)\} \equiv \Delta\{\log \Re(f(w;t))\}. \tag{4}$$

Setzt man $\Delta\{\log \Re(w)\} \equiv Q(w)$, so besagt (4), daß:

$$\left|\frac{\partial f(w;t)}{\partial w}\right|^2 Q(f(w;t)) \equiv Q(w), \tag{5}$$

wobei nach (2):

$$\left|\frac{\partial f(w;t)}{\partial w}\right| \equiv \left|\frac{1 - |w_0|^2}{\overline{w}_0 w - 1}\right|. \tag{5a}$$

Unsere Aufgabe ist es jetzt, diejenigen Hartogsschen Körper zu bestimmen, deren Rand der Funktionalgleichung (5) genügt.

II. 1. Fall:

$$Q(w) \equiv \Delta \log \Re(w) \equiv 0.$$

Es gibt dann eine in $\mathfrak{H}^{(w)}$ — in unserem Falle also für $|w|<1$ — analytische Funktion $\varphi(w)$, so daß

$$\Re(w) \equiv |\varphi(w)|.$$

Der Körper $\mathfrak{H}$ $(|z|<\Re(w))$ läßt sich dann durch die Transformation:

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= w, \\ \tilde{z} &= \frac{z}{\varphi(w)} \end{aligned}$$

auf einen Hartogsschen Körper $\tilde{\mathfrak{H}}$ mit der Randgleichung:

$$(\tilde{z}) = \tilde{\mathfrak{R}}(\tilde{w}) \equiv 1 \quad \text{für alle} \quad |\tilde{w}| < 1,$$

d. h. auf den Einheitsdizylinder abbilden.

2. Fall:

$$\Delta \log \mathfrak{R}(w) \not\equiv 0.$$

$Q_1(w)$ und $Q_2(w)$ seien zwei Lösungen der Funktionalgleichung (5). Dann gilt:

$$\frac{Q_1(f(w;t))}{Q_2(f(w;t))} \equiv \frac{Q_1(w)}{Q_2(w)} \equiv Q^*(w)$$

oder

$$Q^*(f(w;t)) \equiv Q^*(w).$$

Da $f(w;t)$ nach dem Parameter $t$ differentiierbar ist, ist dies nur möglich, falls

$$Q^*(w) = \text{const.}$$

Es unterscheiden sich also sämtliche Lösungen von (5) höchstens durch Konstante. Nun ist die Gleichung der Hyperkugel:

$$|z| = \sqrt{1 - |w|^2}$$

eine spezielle Lösung von (5). Man berechnet leicht, daß für die Hyperkugel

$$Q(w) \equiv -\frac{4}{2} \frac{1}{(1-|w|^2)^2}$$

ist. Es ist demnach

$$\Delta \log \mathfrak{R}(w) \equiv Q(w) \equiv -\frac{4}{\alpha} \frac{1}{(1-|w|^2)^2} \tag{6}$$

die allgemeinste Lösung von (5) ($\alpha$ ist eine beliebige *reelle* Konstante).

Es seien $\mathfrak{R}_1(w)$ und $\mathfrak{R}_2(w)$ die Randgleichungen zweier Hartogsscher Körper, die der Beziehung (6) für das gleiche $\alpha$ genügen. Dann ist:

$$\Delta \{\log \mathfrak{R}_1(w) - \log \mathfrak{R}_2(w)\} \equiv 0,$$

also:

$$\frac{\mathfrak{R}_1(w)}{\mathfrak{R}_2(w)} \equiv |\varphi(w)|,$$

wobei $\varphi(w)$ analytisch und $\neq 0$ für $|w| < 1$ ist.

Die Körper mit demselben $\alpha$ lassen sich also sämtlich durch eine analytische Transformation:

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} \tilde{w} &= w, \\ \tilde{z} &= \frac{z}{\varphi(w)} \end{aligned}$$

aufeinander abbilden. Es genügt demnach für jedes $\alpha$ *einen* Körper anzugeben. Nun gibt es zu jedem $\alpha$ als Lösung von (6) den *Reinhardtschen Körper:*

$$\text{(8)} \qquad |z| < \Re(|w|) = (1 - |w|^2)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Es sind somit alle Hartogsschen Körper, die der Voraussetzung von Satz 9 genügen, auf einen der durch Gleichung (8) dargestellten Körper abbildbar. Hiermit ist Satz 8 bewiesen.

---

Fassen wir kurz die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammen!

In sämtlichen, der von uns behandelten Fälle ergab sich die Tatsache, daß ein *echter* Hartogsscher Körper nur Abbildungen der Form:

$$(T) \qquad \begin{aligned} w' &= f(w), \\ z' &= z\, g(w) \end{aligned}$$

in sich zuläßt, d. h., daß jede Abbildung die Symmetrieebene als Ganzes invariant lassen muß. Da nun ein Reinhardtscher Körper — abgesehen von Dizylinder und Hyperkugel — ebenfalls nur Transformationen $(T)$, eventuell verbunden mit der Transformation

$$\begin{aligned} w' &= z, \\ z' &= w \end{aligned}$$

gestattet[17]), so können wir sagen:

Jede Abbildung eines Hartogsschen Körpers auf sich, der sich nicht durch eine Transformation $(T)$ auf einen allgemeinen Dizylinder oder eine Hyperkugel abbilden läßt, ist von der Form:

$$(T) \qquad \begin{aligned} w' &= f(w), \\ z' &= z \cdot g(w) \end{aligned}$$

oder

$$(T') \qquad \begin{aligned} w' &= f(z), \\ z' &= w\, g(z), \end{aligned}$$

falls $\mathfrak{H}$ eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

---

[17]) Vgl. [3]).

a) Die Gruppe $\Gamma^{(w)}$ ist diskontinuierlich — dies ist insbesondere stets der Fall, wenn $\mathfrak{H}$ ein unvollkommener Körper mit einfach-zusammenhängender Projektion ist —, oder

b) die Gruppe $\Gamma^{(w)}$ enthält mindestens eine kontinuierliche Untergruppe mit differentiierbarem Parameter, die Projektion ist einfach-zusammenhängend, ferner der Rand $|z| = \Re(w)$ mindestens zweimal stetig nach $u$ und $v$ differentiierbar.

Die Transformationen $(T')$ treten dann und nur dann auf, wenn der gegebene Körper sich durch eine Transformation $(T)$ auf einen symmetrischen Reinhardtschen Körper abbilden läßt.

Nicht berücksichtigt wurden in dieser Arbeit die Körper mit mehrfach-zusammenhängender Projektion und zugleich kontinuierlicher Gruppe $\Gamma^{(w)}$[18]). Ferner haben wir bei den Körpern mit einfach-zusammenhängender Projektion und kontinuierlicher Gruppe $\Gamma^{(w)}$ die sehr einschränkende Bedingung gestellt, daß sowohl der Rand $|z| = \Re(w)$ nach $u$ und $v$, wie die Funktionen $f(w; t)$ der Gruppe $\Gamma^{(w)}$ nach $t$ differentiierbar sind.

Es ist aber zu vermuten, daß auch in den restlichen Fällen sämtliche Transformationen Haupttransformationen sind.

---

[18]) Z. B. diejenigen Reinhardtschen Körper, die den Mittelpunkt (0, 0) nicht als inneren Punkt enthalten.

# Lebenslauf.

Ich, Werner Siewert, evangelischer Konfession und preußischer Staatsangehörigkeit, wurde am 14. Februar 1907 zu Hagen i. W. als Sohn des Kaufmanns August Siewert und seiner Frau Marie, geb. Oberbeckmann, geboren.

Nach vierjährigem Besuch einer evangelischen Volksschule besuchte ich von Ostern 1917 bis Ostern 1926 die Städt. Oberrealschule zu Hagen i. W., die ich mit dem Zeugnis der Reife verließ.

Ich studierte in Münster, Göttingen und Bonn Mathematik, Physik und Biologie. Seit dem Sommersemester 1929 war ich Mitglied des Mathematischen Seminars, zuletzt des Mathematischen Oberseminars von Herrn Prof. Dr. Behnke.

Herrn Prof. Dr. Behnke danke ich für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit, und zu besonderem Dank bin ich ihm und seinem Assistenten, Herrn Dr. P. Thullen, verpflichtet für das Interesse und die Ratschläge, durch die sie mich bei der Abfassung und Korrektur dieser Arbeit unterstützten.

Die mündliche Doktorprüfung bestand ich am 16. Dezember 1930.

---

Druck von Lütcke & Wulff, Hamburg.